§1. Числовые ряды

1^0. Понятие числового ряда.

Определение. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum a_n$$

называется **числовым рядом** или **рядом**.

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются **членами ряда**, a_n – **общим членом ряда**.

Суммы конечного числа первых членов ряда

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

называются называются **частичными суммами ряда.**

Определение. Ряд $\sum a_n$ называется **сходящимся**, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$; число S называется **суммой ряда** $\sum a_n$. В этом случае пишут $S = \sum a_n$. В противном случае ряд называется **расходящимся**.

Пример. Каждое действительное число является суммой определенного ряда.

Действительно, пусть число $\mathbf{a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Тогда

$$\mathbf{a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots}$$

2^0. Геометрическая прогрессия представляет собой важнейший тип числового ряда.

Пример. Найти сумму геометрической прогрессии

$$\Sigma\, \mathbf{bq^{n-1} = b + bq + bq^2} + \ldots + \mathbf{bq^{n-1}} + \ldots \text{ при } |\mathbf{q}| < 1.$$

Решение. Имеем $\mathbf{S_n = b\frac{1-q^n}{1-q}}$, так что

$$\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}},$$ при $|q|<1$. Легко проверить, что при $|\mathbf{q}| \geq 1$ указанный ряд расходится

Еще пример сходящегося ряда.

Найти сумму ряда $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$$

Р е ш е н и е. Заметим, что $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Значит,

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

После раскрытия скобок все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожаются, поэтому

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1$ – сумма данного ряда.

3^0. Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема (необходимый признак сходимости).

Если ряд $\Sigma\, a_n$ сходится, **то** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство

$$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$$

и переходя к пределу, получаем

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$, поскольку последовательность (S_n) сходится к числу **S** по условию. □

4^0. Гармонический ряд

Пример Доказать, что гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится

Решение. Допустим, что гармонический ряд сходится к числу **S**. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=S-S=0.$$

С другой стороны,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

– противоречие.

Замечание

Общий член гармонического ряда стремится к 0, но сам ряд расходится, значит, приведенный необходимый признак сходимости не является достаточным.

5^0. Свойства сходящихся рядов

Теорема 1. Если сходится ряд Σa_n, то сходится и ряд, полученный из данного отбрасыванием конечного числа его членов.

Доказательство

Пусть, для простоты, отбросили первые **k** членов.

Частичные суммы исходного ряда и «нового» ряда обозначим через S_n **и** $\overline{S_n}$ соответственно.

Тогда $S_n = \overline{S_{n-k}} + S_k$ при $n>k$

Поскольку S_k константа, то указанные ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся, значит, переходя к пределу, получаем, что сумма нового ряда равна $\Sigma a_n - S_k$ $\square$

Теорема 2

Если сходится ряд Σa_n и его сумма равна S,
c – произвольное число,
то сходится ряд Σca_n и его сумма равна cS.

Теорема 3

Если сходятся ряды Σa_n и Σb_n
причем $\Sigma a_n = S$ и $\Sigma b_n = T$,

то ряд $\Sigma(a_n + b_n)$ также сходится и $\Sigma (a_n + b_n) = S + T$.

Доказательство теорем 2 и 3 провести самостоятельно.

Теорема 4

Если сходится ряд Σa_n, то сходится и ряд, полученный из него группировкой слагаемых, причем суммы этих рядов совпадают.

Доказательство. Назовем ряд, полученный из данного группировкой членов, «новым».

Пример «нового» ряда $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) + \ldots$, в котором члены сгруппированы по два (возможны и другие группировки, когда в скобках содержится разное число членов исходного ряда).

Ясно, что частичная сумма $\overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}}$ нового ряда совпадает с некоторой частичной суммой $\mathbf{S}_{\mathbf{n}}$ исходного ряда, причем $\mathbf{n} \geq \mathbf{k}$.

Если $\mathbf{k} \to \infty$, то $\mathbf{n} \to \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{\mathbf{S}}_{\mathbf{k}} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{S}_{\mathbf{n}}$. □

§2. Признаки сходимости

Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

В этом разделе рассматриваются только ряды с положительными членами.

1^0. Критерий сходимости.

Теорема. **Ряд с положительными членами сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм ограничена**.

Доказательство. Поскольку последовательность частичных сумм такого ряда является монотонно возрастающей, то свойства ограниченности и сходимости такой последовательности эквивалентны в силу теоремы Вейерштрасса. □

2^0. Признаки сравнения.

Теорема (первый признак сравнения).
Пусть даны два ряда с положительными членами Σa_n и Σb_n, и $a_n \le b_n$ для каждого n.
Тогда

если ряд Σa_n расходится, то ряд Σb_n расходится;
если ряд Σb_n сходится, то ряд Σa_n сходится.

Доказательство
Пусть ряд Σb_n сходится, тогда последовательность его частичных сумм (T_n) ограничена по критерию сходимости.
Далее, частичная сумма S_n ряда Σa_n по условию удовлетворяет неравенству $S_n \le T_n$,
значит,
последовательность частичных сумм (S_n) ограничена,
а, стало быть, ряд Σa_n сходится. □

Пример

Доказать сходимость ряда $\sum \frac{1}{n^2}$.

Решение

Заметим, что $n^2 \geq n(n-1)$,

значит, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.

Поскольку ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ сходится

(см. пример из раздела 2^0 §1:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$),

то ввиду первого признака сравнения сходится и ряд

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

Теорема (второй признак сравнения).

Пусть даны два ряда с положительными членами Σa_n и Σb_n, и существует отличный от нуля предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=c$. Тогда оба ряда Σa_n и Σb_n либо одновременно сходятся, либо одновременно расходится.

Доказательство. Допустим, что ряд Σb_n сходится. Выберем произвольное число $d>c$, тогда начиная с некоторого номера n_0 выполнено неравенство $a_n / b_n < d$, значит, $a_n < db_n$. Отбросив первые n_0 членов в каждом из данных рядов (что не влияет на сходимость), получаем, что неравенство $a_n < db_n$ выполнено для всех членов «новых» рядов. Поскольку ряд с общим членом db_n сходится, то по первому признаку сравнения сходится и ряд с общим членом a_n.

Осталось заметить, что ряды Σa_n и Σb_n равноправны, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{1}{c}$ (по условию $c \neq 0$). □

Пример. Исследовать на сходимость ряд с общим членом

$$a_n=\frac{2n+7}{3n^3+4n^2+5n+6}.$$

Решение. Сравним этот ряд со сходящимся рядом с общим членом $b_n=\dfrac{1}{n^2}$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+7)}{3n^3+4n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+7n^2}{3n^3+4n^2+5n+6}=\frac{2}{3}\neq 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится по второму признаку сравнения.

Теорема (третий признак сравнения).

Пусть даны два ряда с положительными членами Σa_n и Σb_n, и существуют положительные числа $c < d$ такие, что, начиная с некоторого номера, справедливы неравенства

$c < a_n/b_n < d$. Тогда оба ряда Σa_n и Σb_n либо одновременно сходятся, либо расходится.

Доказать самостоятельно.

Замечание. Рассматривая вопрос о сходимости того или иного ряда, его сравнивают с одним из «стандартных». В случае сходимости роль стандартного ряда играет геометрическая прогрессия, а в случае расходимости – гармонический ряд.

3^0. Признаки Даламбера и Коши.

Признак Даламбера.

Пусть дан ряд с положительными членами Σa_n

и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = D$

Тогда при $D<1$ ряд Σa_n сходится,

при $D>1$ – расходится

(при $D=1$ никакого вывода о сходимости или расходимости ряда сделать нельзя).

Доказательство

Пусть $\mathbf{D}<1$.

Тогда для подходящего числа $\mathbf{q}$ $(\mathbf{D}<\mathbf{q}<1)$

с некоторого места $\mathbf{n}$ справедливы неравенства

$$\mathbf{a_{n+1}/a_n \le q} \qquad \mathbf{a_{n+1} \le a_n q}$$

Без ограничения общности, можно считать, что для всех индексов верно

$$\mathbf{a_{n+1} \le a_n q}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{a_{n+1} \le a_1 q^n}$$

Тогда $\mathbf{\Sigma a_n \le a_1 \Sigma\, q^n = a_1\,(1-q)^{-1}}$

Аналогично рассматривается случай $\mathbf{D}>1$.

Заметим, что $\mathbf{D} = 1$ для расходящегося гармонического ряда и сходящегося ряда $\mathbf{\Sigma n^{-2}}$. □

Пример.

Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)}=\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\ldots .$$

Решение.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1$$

Таким образом, данный ряд сходится.

Признак Коши

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$

то при k<1 **ряд** Σa_n **сходится**

при k>1 – **расходится**

(**при k**=1 **никакого вывода о сходимости или расходимости ряда сделать нельзя**).

Доказательство провести самостоятельно.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}e<1$. Следовательно, данный ряд сходится.

4^0. Интегральный признак.

Интегральный признак

Пусть дан ряд Σa_n такой, что $f(n) = a_n$ для всех n, а $f(x)$ положительная непрерывная и убывающая на промежутке $x \geq 1$ функция.

Тогда несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

и ряд Σa_n

сходятся или расходятся одновременно.

Проиллюстрировать на рисунке.

Пример

Используя интегральный признак,

покажем, что гармонический ряд расходится.

Решение.

Положим $\mathbf{f(x)} = \dfrac{1}{x}$

Тогда $\displaystyle\int_1^a f(x)dx = \ln a$

и интеграл $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ расходится.

Следовательно, гармонический ряд также расходится.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

Пусть Σa_n – произвольный знакопеременный ряд.
Рассмотрим ряд $\Sigma|a_n|$,
составленный из абсолютных величин его членов.
Если ряд $\Sigma|a_n|$ сходится, то и ряд Σa_n сходится
и называется **абсолютно сходящимся.**
Если ряд Σa_n сходится, а ряд $\Sigma|a_n|$ расходится,
то ряд Σa_n называется **условно сходящимся**.

Признак Лейбница. Если знаки членов ряда Σa_n чередуются, а их абсолютные величины, монотонно убывая, стремятся к нулю, т.е. $|a_n|<|a_n|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд Σa_n сходится, а для его остатков $r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$

выполняются неравенства: $|r_k|<|a_{k+1}|$.

Доказательство прочитать на с. 362.

Пример. Доказать условную сходимость ряда $\boldsymbol{\Sigma(-1)^n n^{-1}}$.
Решение. Данный ряд – знакочередующийся, он сходится по признаку Лейбница.
Ряд из модулей – гармонический, он расходится.
Значит, данный ряд сходится условно.

Пример. Доказать абсолютную сходимость ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin\frac{\pi}{n}}{n}.$$
Решение. Поскольку $\boldsymbol{\sin(\pi/n) < \pi/n}$, то ряд из модулей ограничен сверху сходящимся рядом $\boldsymbol{\pi\Sigma n^{-2}}$.

Теорема. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится. Сумма такого ряда равна разности между суммой его плюс-ряда и суммой минус-ряда.
Доказательство прочитать на с.365.

9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot(n+1)}{n^2+n+1}$.

Р е ш е н и е. Данный ряд – знакочередующийся. Имеем:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{(n+1)[(n+1)^2+(n+1)+1]}{(n+2)(n^2+n+1)}=\frac{n^3+4n^2+6n+3}{n^3+3n^2+3n+2}>1;$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+1/n)}{n^2(1+1/n+1/n^2)}=0.$$

По признаку Лейбница данный ряд сходится.

Далее, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n}{1+1/n+1/n^2}=1\neq 0.$

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, как и гармонический, расходится

Окончательный вывод: данный ряд сходится условно

Самостоятельная работа

1) Теорема Римана (для условно сходящихся рядов). **Если ряд сходится условно, то в результате перестановки его членов можно получить ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, а также можно получить расходящийся ряд.**

2) Пример 5.17 на с. 367.

3) Понятие о комплексных числовых рядах.

§3. Степенные ряды

1^0. Теорема Абеля.

Определение

Пусть $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ – некоторая числовая последовательность. Ряд

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1\mathbf{x} + \mathbf{a}_2\mathbf{x}^2 + \ldots + \mathbf{a}_n\mathbf{x}^n + \ldots \qquad (1)$$

называется **степенным рядом**.

Числа $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Подставляя вместо $\mathbf{x}$ различные значения, будем получать различные числовые ряды.

Множество тех значений $\mathbf{x}$, при которых ряд сходится, называется его **областью сходимости**.

Область сходимости любого степенного ряда содержит точку $\mathbf{x} = 0$.

Теорема Абеля

Если степенной ряд (1) **сходится при некотором значении x_0, то он сходится, причем абсолютно, при всех x таких**, **что** $|x| < |x_0|$

Далее, если ряд (1) **расходится при некотором x_1 то он расходится при всех x таких**, **что** $|x| > |x_1|$

Доказательство.

По условию числовой ряд

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots$$

сходится, значит, его общий член $a_nx_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому сходящаяся последовательность $\{a_nx_0^n\}$ ограничена, т.е. $(\exists M)(\forall n)\,|a_nx_0^n| < M$.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из модулей членов ряда (1)

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots \qquad (2)$$

Пусть $|x| < |x_0|$,

тогда $|a_n x^n| < |a_n x_0^n|\,|x/x_0|^n < M|x/x_0|^n$ и $|x/x_0| < 1$.

Поэтому ряд (2) не превосходит суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$M + M|x/x_0| + M|x/x_0|^2 + \ldots + M|x/x_0|^n + \ldots$$

Тем самым, ряд (1) сходится абсолютно.

Допустим теперь, что ряд (1) расходится при x_1, но сходится при некотором x, для которого верно неравенство $|x| > |x_1|$. Тогда по доказанному ряд (1) должен сходится при x_1, – противоречие. □

2^0. Радиус сходимости степенного ряда.

Из теоремы Абеля вытекает

Следствие. Для степенного ряда (1) **возможны только следующие возможности**:

(а) **ряд сходится в единственной точке** 0;

(б) **ряд сходится во всех точках**;

(в) **существует R**>0 **такое, что ряд сходится во всех точках интервала** (- **R**, **R**) **и расходится во всех точках вне отрезка** [- **R**, **R**].

Определение. Число о котором идет речь в следствии, называется **радиусом** сходимости числового ряда, интервал (- **R**, **R**) называется **интервалом** сходимости.

Считая **R** равным 0 и ∞, получаем все три случая, указанные в следствии, приводят к понятию радиуса сходимости.

Радиус сходимости можно найти с помощью признака Даламбера или Коши.

Теорема

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D \neq 0$,

то радиус сходимости ряда (1) **равен R** = 1/**D**.

Доказательство. Рассмотрим ряд (2), составленный из модулей. По признаку Даламбера ряд (2) сходится, если

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{R} < 1,$$ т.е. при $|x| < R$.

При $|x| > R$

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R} > 1$$

значит, ряд (1) расходится,

так как общий член ряда $a_n x^n$ не стремится к нулю (доказать!). □

Пример

Найти интервал сходимости степенного ряда, исследовать сходимость на границах интервала:

$$\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\dots .$$

Решение. Имеем $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1.$

При x = 1 получаем ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots .$

Для его частичных сумм имеем:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

Значит, ряд сходится, а его сумма равна 1

При **x** = –1 получим ряд

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Ряд, составленный из модулей его членов,

как мы уже видели, сходится,

следовательно, последний ряд сходится абсолютно.

Пример. Найти интервал сходимости ряда

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Решение

$$a_n=\frac{1}{n!},a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!\cdot(n+1)}$$

Следовательно,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}:\frac{1}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Значит, указанный ряд сходится на всей числовой прямой.

Заметим, что для каждого значения **x** сумма ряда равна числу e^x.

Пример

Найти область сходимости степенного ряда

$$\mathbf{x} + (2\mathbf{x})^2 + (3\mathbf{x})^3 + \ldots + (\mathbf{nx})^{\mathbf{n}} + \ldots.$$

Решение

Для любого $\mathbf{x} \neq 0$ найдется $\mathbf{n_0}$

начиная с которого $\mathbf{n} > \dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{x}|}$, $\left|(\mathbf{nx})^{\mathbf{n}}\right| > 1$

значит, данный ряд расходится при $\mathbf{x} \neq 0$.

Это означает, что его область сходимости состоит только из нуля.

3^0. Интегрируемость и дифференцируемость суммы степенного ряда

Пусть функция **f**(**x**) является суммой ряда на интервале сходимости (-**R**, **R**)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (3)$$

Иначе говорят, что

функция f(**x**) **на** (-**R**, **R**) **разлагается в степенной ряд**.

Следующие две теоремы примем без доказательства.

Теорема (о почленном дифференцировании степенного ряда).
Пусть функция f(x) на (-R, R) разлагается в степенной ряд.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (3)$$

Рассмотрим ряд

$$a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \qquad (4)$$

полученный почленным дифференцированием ряда (3).
Тогда:

1) **ряд** (4) **имеет тот же радиус R сходимости, что и ряд (3);**

2) **на** (-**R**, **R**) **функция f**(**x**) **имеет производную f′**(**x**),

которая разлагается в степенной ряд (4).

Значит, функция, разлагающаяся на (-**R**, **R**) в степенной ряд является гладкой на этом отрезке, т.е. имеет на нем производные всех порядков. Производную любого порядка на указанном интервале можно найти почленным дифференцированием подходящее число раз.

Теорема (о почленном интегрировании степенного ряда). **Если функция f(x) на (-R, R) разлагается в степенной ряд (3), то она интегрируема на этом интервале. Интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда**.

Иначе говоря, если $[r,s] \subset (-R, R)$, то

$$\int_r^s f(x)dx = \int_r^s (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots)dx =$$

$$= \int_r^s a_0 dx + \int_r^s a_1 x dx + \ldots + \int_r^s a_n x^n dx + \ldots$$

и, при $|x| < R$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$

причем ряд в правой части последнего равенства имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (3).

§4. Разложение функции в степенной ряд

1^0. Ряд Маклорена.

Определение. Пусть функция **f**(**x**) определена и имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки **x** = 0. Степенной ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

называется **рядом Маклорена функции f**(**x**).

Теорема. **Если функция f**(**x**) **разлагается в степенной ряд в окрестности точки x** = 0, **то он является ее рядом Маклорена**.

Действительно, пусть функция **f**(**x**) на отрезке (-**r**, **r**) разлагается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (1)$$

Найдем коэффициенты ряда (1).
Поскольку степенной ряд можно почленно дифференцировать,
то на отрезке $(-\mathbf{r}, \mathbf{r})$ справедливы равенства

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{x}^{\mathbf{n}-1} + \ldots,$$

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{a}_2 + 3\cdot 2\mathbf{a}_3\mathbf{x} + \ldots + \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-1)\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{x}^{\mathbf{n}-2} + \ldots,$$

…………………………………………………..

$$\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-1)\cdot(\mathbf{n}-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\mathbf{a}_\mathbf{n} + \ldots = \mathbf{n}!\mathbf{a}_\mathbf{n} + \ldots$$

Полагая в этих равенствах $\mathbf{x} = 0$, получим

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{a}_0,\ \mathbf{f}'(0) = \mathbf{a}_1,\ \mathbf{f}''(0) = 2\mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(0) = \mathbf{n}!\mathbf{a}_\mathbf{n},\ \ldots$$

следовательно, $\mathbf{a}_\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{0})}{\mathbf{n}!}$, где $\mathbf{n} = 0, 1, 2, \ldots$ □

2^0. Достаточное условие разложимости функции в ряд Маклорена.

Известно (см. формулу Тейлора), что для любой гладкой функции **f**(**x**) справедлива формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{где } 0 < c < x.$$

Обозначая частичную сумму ряда Маклорена через $S_n(x)$, получаем

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Тем самым, вопрос о сходимости ряда Маклорена сводится к изучению поведения остаточного члена при $n \to \infty$

Теорема. Если функция f(x) является гладкой на отрезке (–r, r) и для некоторой константы M выполнены неравенства $\left|f^{(n)}(x)\right| < M, n = 0, 1, 2, \ldots$, то в этом интервале ряд Маклорена сходится к функция f(x).

Доказательство. Достаточно доказать $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Используя формулу для остаточного члена, получаем $\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| < \frac{M}{(n+1)!} r^{n+1}$. Поскольку ряд $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$ сходится при любом значении **r**, то его общий член стремится к 0, а значит, и последовательность $\{R_n(x)\}$ б.м. при каждом фиксированном значении $x \in (-r, r)$.

□

3^0. Разложения функций e^x, sin x, cos x, $(1 + x)^\alpha$, ln (1 + x), arctg x в ряд Маклорена.

1. $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (r = \infty)$$

2. $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (r = \infty)$$

3. $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (r = \infty)$$

Достаточно заметить, что на любом интервале (–**r**, **r**) производные функций **e^x, sinx, cosx** всех порядков ограничены в совокупности некоторым числом **M**. Имеем

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

следовательно, все производные экспоненты в точке 0 равны 1, и получаем формулу 1).

Далее, $\sin' x = \cos x$, $\sin'' x = -\sin x$,

$$\sin^{(3)} x = -\cos x, \qquad \sin^{(4)} x = \sin x,$$

значит, последовательности производных функции sin **x** периодичны с периодом 4.

Наконец, отметим, что

$$\sin^{(2n)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

следовательно, ряд Маклорена для функции sin **x** совпадает с формулой 2).

Далее, ряд Маклорена для функции **cos x** легко получить из 2) почленным дифференцированием.

4. $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (r = 1)$$

5. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad (r = 1)$$

Формулы 4) и 5) представляют собой сумму бесконечной геометрической прогрессии.

6. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

(**r** = 1)

Почленное интегрирование формулы 5) приводит к формуле 6). Заметим, что последняя формула имеет место и для **x** = 1, т.е. верно равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots$$

7. $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (r = 1)$$

Для проверки этой формулы достаточно подставить в формулу 5) **x** = t^2 и затем провести почленное интегрирование по **t** от 0 до **x**.

Формула 7) остается верной и при **x** = 1, значит,

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \ldots$$

8. $$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots.$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots \qquad (\mathbf{r}=1)$$

или иначе

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n},\ \text{где}\ \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\ldots\left(\alpha-\left(n-1\right)\right)}{n!}$$

9. $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right) \quad (\mathbf{r}=1)$$

Это равенство легко получается из формулы 6), логарифма частного и действий над рядами.

4^0. Разложимость гладкой функции в ряд Тейлора.

Заменяя в степенном ряде (1) переменную **x** на (**x** – **x**$_0$), получим **степенной ряд с центром в точке x**$_0$:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad \mathbf{(2)}$$

До сих пор мы рассматривали степенные ряды с центром в $x_0=0$. Считая $X = (x - x_0)$, ряд **(2)** принимает вид **(3)**

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n + \ldots \qquad \mathbf{(3)}$$

Если ряд (3) имеет интервал сходимости (-**R**, **R**), т.е. сходится при $|X| < R$ и расходится при $|X| > R$. Следовательно, интервал сходимости ряда (2) имеет вид

$$(x_0 - R,\ x_0 + R).$$

На этом интервале можно в частности дифференцировать и интегрировать ряд (2).

Определение.

Пусть функция $\mathbf{f(x)}$ определена и имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Степенной ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

называется

рядом Тейлора функции f(x) с центром в точке x_0.

Нетрудно доказать справедливость следующей теоремы

Теорема.

Если функция разлагается в степенной ряд в окрестности точки x_0 по степеням $(x - x_0)$, то он является ее рядом Тейлора с центром в точке x_0.

Самостоятельная работа.

4) Степенные ряды с комплексными коэффициентами.

5) Формула Эйлера.

6) Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям (сс.384-390)

7) Контрольная работа № 6